

# 一种新的二维快速波达方向估计方法 ——虚拟累量域波达方向矩阵法

刘 全

(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

摘 要: 本文利用3个具有特别位移特性的任意子阵元阵列和累量,构造出了虚拟累量域波达方向矩阵.利用虚拟累量域波达方向矩阵的特征值的幅值和相位信息,就可以求出信号源的方位角和俯仰角.因为子阵列结构是任意的,因此选择适当的子阵列就获得很好的估计效果.而由于采用了累量,因此新方法对高斯噪声不敏感.

关键词: 波达方向估计; 累量; 虚拟累量域波达方向矩阵

中图分类号: TN911.7 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2002)03-0351-03

## A Novel Fast Method for 2-D Direction of Arrival Estimation ——Virtual Cumulant Based DOA Matrix Method

LIU Quan

(School of Electronic Science & Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: A new type matrix virtual cumulant based DOA matrix, is formed based on three arbitrary sensor subarrays with special translation. The azimuth and elevation of the incident sources can be estimated respectively from the amplitude and phase information of the eigenvalues of the new matrix. Accurate estimation can be obtained due to the arbitrary geometry of the subarrays and the insensitivity of cumulants to Gaussian noise.

Key words: direction of arrival estimation; cumulant; virtual cumulant based DOA matrix

### 1 引言

自上世纪八十年代以来,二维波达方向估计开始受到人们越来越多的重视.现在已经提出了不少方法.波达方向矩阵法[1]是其中一个具有较好性能的方法:通过对波达方向矩阵的特征分解,就可以从特征值和特征向量中分别求出信号源的方位角和俯仰角,计算量较小,参数自动匹配.波达方向矩阵法存在一些弱点,虽然大部分弱点,如不适用于方位角和俯仰角兼并的情况,可以得到克服<sup>[4]</sup>,但它还有一个问题没有得到充分的认识和解决,就是采用特征向量来估计方位角.从矩阵分析可以知道,矩阵分解时,特征值是稳定的,但特征向量的稳定性是没有保证的,因此,在有些时候,如信噪比很低时,波达方向矩阵法的估计性能不是很理想,可能会出现估计误差急剧增加的情况.二维虚拟 ESPRIT 算法<sup>[2,3]</sup>是另外一种性能较好的方法.它采用特征值的幅值和相位就可以估计出信号源的方位角和俯仰角,对阵列结构的要求也比较低,因此具有较好的稳健性.

本文综合了上述两种方法的优点,基于三个具有特别位移特性的子阵列,利用累量构造出了虚拟累量域波达方向矩阵,由矩阵的特征值就可以同时估计出信号源的方位角和俯

仰角,避免了用特征向量来估计方位角所可能带来的问题,并且和波达方向矩阵法一样,不需要进行谱峰搜索,因而计算量较小.采用虚拟累量域波达方向矩阵求解还具有其它一些优点,如对高斯噪声不敏感,所有这些优点都会在后面进行说明.

在本文中,均假设信号源为相互统计独立的窄带远场平面波,信号源数为  $P$ ,和  $X$ 、 $Y$  轴的夹角(在本文中将不严格地分别被称为方位角和俯仰角)分别为  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, P$ . 噪声为时域和空域上的高斯噪声,且统计独立于各信号源.

### 2 虚拟累量域波达方向矩阵法

先考虑比较简单情况,在如图1所示的阵列中,由三个子线性阵列  $Y_0$ ,  $Y_1$  和  $Y_2$  组成,每个子阵列有  $M$  个阵元,子阵列相互平行,且完全相同,  $Y_1$  和  $Y_2$  对称于  $X$  轴,和  $X$  轴的距离为  $d_y$ ,其第一个阵元和  $Y$  轴的距离为  $d_x$ ,每个子阵列中的第  $i$  个阵元到其第一个阵元的距离为  $d_i$ .显然,这个阵列和二维虚拟 ESPRIT 算法所采用的阵列结构是一样的.设  $y_{m,k}$ ,  $m = 0, 1, 2$ ;  $k = 1, 2, \dots, M$ ,代表阵列  $Y_m$  的第  $k$  个阵元,  $y_{0,1}$  上所接收的信号为  $s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, P$ ,考虑下面三个累

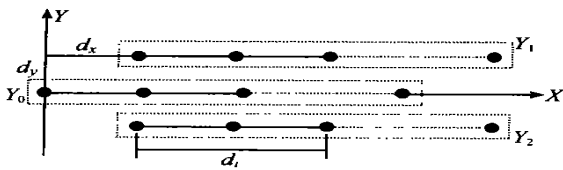


图 1 三线性平行子阵列

量矩阵:

$$CUM_0 = [\text{cum}(y_{0,1}, y_{0,1}, y_{0,k}, y_{0,i})]_{M^* \times M}$$

$$CUM_1 = [\text{cum}(y_{0,1}, y_{0,1}, y_{1,k}, y_{0,i})]_{M^* \times M}$$

$$CUM_2 = [\text{cum}(y_{0,1}, y_{0,1}, y_{2,k}, y_{0,i})]_{M^* \times M}$$

根据累量的定义和性质<sup>[5]</sup>, 可以求出这三个累量矩阵:

$$CUM_0 = A^* D(A^*)^H \quad (1)$$

$$CUM_1 = A^* \Phi_1^* D(A^*)^H \quad (2)$$

$$CUM_2 = A^* \Phi_2^* D(A^*)^H \quad (3)$$

其中

$$A = [a_1 a_2 \dots a_p]$$

$$a_i = [\exp(ju_{1,i}) \exp(ju_{2,i}) \dots \exp(ju_{M,i})]^T$$

$$\Phi_1 = \text{diag} \{ \exp[j(u_{0,1} + v_1)] \exp[j(u_{0,2} + v_2)] \dots \exp[j(u_{0,p} + v_p)] \}$$

$$\Phi_2 = \text{diag} \{ \exp[j(u_{0,1} - v_1)] \exp[j(u_{0,2} - v_2)] \dots \exp[j(u_{0,p} - v_p)] \}$$

$$D = \text{diag} \{ C_{4,1} C_{4,2} \dots C_{4,p} \}$$

$$u_{0,k} = 2\pi d_x \cos \alpha_k / \lambda$$

$$v_k = 2\pi d_y \cos \beta_k / \lambda$$

$$U_{ik} = 2\pi d_i \cos \alpha_k / \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad k = 1, 2, \dots, P$$

$$C_{4,i} = \text{cum}(s_i^*(t), s_i(t), s_i^*(t), s_i(t))$$

可以看出,  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  中包含有信号源的方位和俯仰信息,  $A$  中包含有信号源的方位信息. 式(1)与式(2)或式(3)的关系也类似存在于波达方向矩阵法, 因此通过求  $\{CUM_0, CUM_1\}$  或  $\{CUM_0, CUM_2\}$  的广义特征分解, 即采用和波达方向矩阵法相似的方法, 在  $A$  和  $\Phi_1, \Phi_2$  满足一定条件的情况下, 就可以从特征值和特征向量求出信号源的方向. 但这样做一方面会对阵列的结构产生较大的限制, 另一方面, 也不能避免特征向量的不稳定性所可能引起的估计性能下降. 我们又可以看到,  $\Phi_1(\Phi_2)$  中已经包含了方位和俯仰信息, 但由于同时存在于相位中, 因此不能用来直接估计信号源的方向. 在二维虚拟 ESPRIT 算法中, 采用了虚拟矩阵的方法, 使得方位和俯仰信息分别存在于特征值的幅值和相位中, 从而可以只用特征值就估计出信号源的两个方向. 在这里, 我们也可以利用相同的方法.

令

$$CUM_3 = CUM_1 + CUM_2$$

则有

$$CUM_3 = A^* \Phi^* D(A^*)^H$$

其中

$$\Phi = \text{diag} \{ 2\cos v_1 \exp(ju_{0,1}) 2\cos v_2 \exp(ju_{0,2}) \dots 2\cos v_M \exp(ju_{0,M}) \}$$

可以看出, 现在  $\Phi$  中包含有方位和俯仰信息, 且分别位于相位和幅值中, 能够有效利用. 通过求  $\{CUM_0, CUM_3\}$  的广义特

征分解, 其  $P$  个非零特征值就是  $\Phi$  的  $P$  个对角元素, 具体方法如下所述, 和波达方向矩阵法是相似的.

显然,  $CUM_0$  的秩为  $P$ , 因此它有下面的特征分解:

$$CUM_0 = \sum_{k=1}^P \lambda_k e_k e_k^H$$

其中  $\lambda_k$  和  $e_k$  分别为  $CUM_0$  按降序排列的第  $k$  个特征值和相应的特征向量.

若  $CUM_0$  的伪逆定义为:

$$CUM_0^\# = \sum_{k=1}^P \lambda_k^{-1} e_k e_k^H$$

则定义如下的虚拟累量域波达方向矩阵:

$$C = CUM_3 \cdot CUM_0^\#$$

对虚拟累量域波达方向矩阵进行特征分解, 则有如下关系:

$$CA^* = A^* \Phi^* \quad (4)$$

上式的证明和文献[1]相似.

显然, 从虚拟累量域波达方向矩阵的特征值就可以求出信号源的方位角和俯仰角:

$$\alpha_k = \cos^{-1}(-\arg(\phi_k) \cdot \mathcal{N}(2\pi d_x)) \quad (5)$$

$$\beta_k = \cos^{-1}(\cos^{-1}(\text{abs}(\phi_k)/2) \cdot \mathcal{N}(2\pi d_y)) \quad (6)$$

其中  $\phi_k$  为  $\Phi$  的第  $k$  个对角元素,  $\arg(\cdot)$ ,  $\text{abs}(\cdot)$  分别为求相位和幅值的函数.

从上面的介绍可以看出, 虚拟累量域波达方向矩阵法利用特征分解得到的特征值就可以直接得到两个方向的估计, 不需要进行任何搜索求解, 因此计算量较小, 是一种快速的二维波达方向估计方法. 另外, 因为利用了累量来估计方向, 因此具有对高斯噪声的不敏感性.

在二维虚拟 ESPRIT 算法中,  $d_x$  和  $d_y$  的选取有一定要求, 否则会有相位模糊现象, 在本文中也存在同样的问题. 一般可选  $d_y = \lambda/4$ ,  $d_x = \lambda/2$ , 这时  $0 \leq v_i \leq \pi/2$ ,  $\cos v_i$  为正, 可由  $\Phi$  的对角元素的幅值(等于  $2\cos v_i$ )求得  $v_i$ , 相位求得  $u_{0,i}$ . 应该注意到, 这里没有对  $d_i$  进行限制, 因此子阵列具有较好的灵活性.

图 1 中的子阵列是线性的, 因此不能适用于方位角兼并的情况, 其实我们可以采用更一般的阵列结构, 只需要  $Y_0, Y_1$  和  $Y_2$  具有如图 2 所示的关系即可, 这时就可以适用于方位角兼并的情况, 并且由于子阵列结构任意, 因此可以通过选择不同的结构来获得精确的估计, 并且配置时灵活性好, 校准也容易. 图 1 的好处是可以象波达方向矩阵法那样利用特征向量来求方位角. 在后面的仿真中, 我们就同时利用了特征值和特征向量来求方向并进行了对比. 另外, 在本文的方法中, 因为特征值由方位角和俯仰角共同决定, 因此允许存在俯仰角兼并, 而波达方向矩阵法不能适用于这种情况.

### 3 仿真实验

本节给出虚拟累量域波达方向矩阵法的计算机仿真结果. 每个实验都由 100 次独立试验组成, 每次试验的快拍数为 100. 噪声为高斯噪声.

例 1 本实验采用图 1 所示的阵列结构. 阵列由 3 个线性平行子阵列组成, 每个子阵列有 4 个阵元, 子阵列在  $X, Y$  方

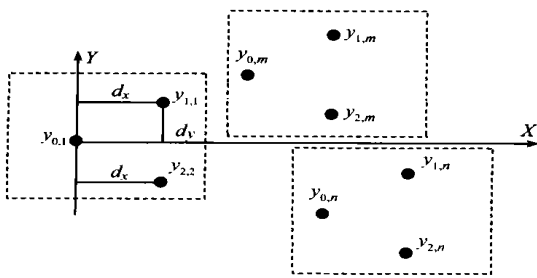


图 2 三阵元组成的阵列

向上的平移量  $d_x$ 、 $d_y$  分别为半波长和四分之一波长, 子阵列内第  $i$  个阵元到我第一个阵元的距离  $d_i$  ( $i=2, 3, 4$ ) 分别为 1, 3, 7 倍半波长。信号源有两个, 功率相同, 入射角分别为  $(45^\circ, 40^\circ)$ 、 $(60^\circ, 60^\circ)$ , 两信号互相独立。因为这种阵列结构可以用特征向量来估计方位角, 因此实验中用了两种方法, 方法 1 为用式(5)、(6)来估计两个方向的本文方法, 方法 2 中, 则用式(4)中的特征向量来估计方位角, 用式(6)来估计俯仰角, 具体方法和文献[1]相似。显然, 这两种方法对俯仰角的估计是相同的, 因此在实验结果中没有画出来, 对方位角的估计结果见图 3。从图中可以看出, 在信噪比很低时, 采用特征向量估计出现了方位误差增加很快的现象, 而采用特征值估计就没有出现这个问题, 从而说明了采用特征值进行估计具有较好的稳定性。

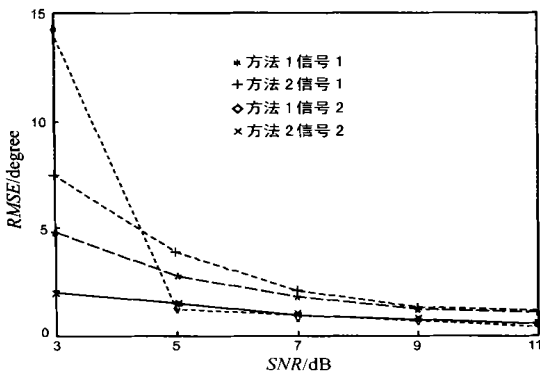


图 3 例 1 对方位角的估计结果

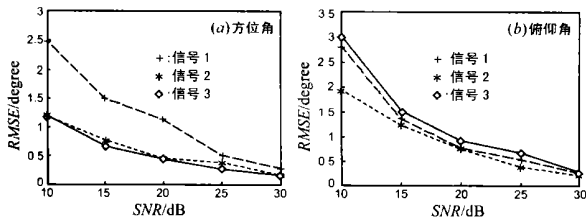


图 4 例 2 的估计结果

例 2 本实验采用图 2 所示的阵列结构。每个子阵列有 6 个阵元, 子阵列在  $X$ 、 $Y$  方向上的平移量  $d_x$ 、 $d_y$  仍然为半波长

和四分之一波长, 子阵列  $Y_0$  的 6 个阵元的坐标分别为  $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(1, 0.5)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(15, -4.7)$ 、 $(25, 4.3)$ 、 $(30, 1.2)$ , 单位为半波长。信号源有 3 个, 功率相同, 入射角分别为  $(45^\circ, 40^\circ)$ 、 $(45^\circ, 60^\circ)$ 、 $(60^\circ, 60^\circ)$ , 3 个信号互相独立。这种阵列结构不能用特征向量来估计方位角, 因此实验中只用了本文提出的方法。实验的结果见图 4。从图中可以看出, 虽然这 3 个信号在方位、俯仰方向都有兼并现象, 但本文方法仍然可以精确地估计出各个信号源的方向。

### 4 结论

从前面的理论分析和仿真实验结果可以看出, 本文提出的虚拟累量域波达方向矩阵法是一种具有较好性能的二维波达方向估计方法: 计算量较小; 不需特殊处理就能够适用于方位角和俯仰角发生兼并的情况; 子阵列的结构任意, 因此阵列校准比较容易, 配置灵活, 并且可以通过改变子阵列结构获得良好的估计结果; 采用特征值估计两个方向, 避免了特征向量的不稳定性所可能带来的问题; 采用了累量矩阵, 具有对高斯噪声的不敏感性。本文方法的主要缺点是可以估计的信号数较少, 最多为  $M$  个, 阵列孔径利用率低, 如果能够克服这个缺点, 那么本文方法将是一个非常优秀的方法。

### 参考文献:

- [ 1 ] 殷勤业. 高分辨率波达方向估计 [ D ]. 博士学位论文. 西安: 西安交通大学研究生院, 1989.
- [ 2 ] 刘全, 等. 二维虚拟 ESPRIT 算法 [ J ]. 信号处理, 2001, 17(3): 247- 251.
- [ 3 ] Liu Q. 2-D virtual ESPRIT algorithm [ A ]. Electronics Letters, 2001, accepted.
- [ 4 ] 叶中付, 沈凤麟. 一种快速的二维高分辨波达方向估计方法——混合波达方向矩阵法 [ J ]. 电子科学学刊, 1996, 18(6): 567 - 573.
- [ 5 ] Mendal J M. Tutorial on higher order statistics(spectra) in signal processing and system theory: Theoretical results and some applications [ J ]. Proc. IEEE, 1991, 79(2): 278- 305.
- [ 6 ] Roy R, Kailath T. ESPRIT- Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [ J ]. IEEE Trans., 1989, ASSP 37(7): 984 - 995.

### 作者简介:



刘 全 男, 1971 年出生于湖南省株洲市, 1999 年在湖南省长沙市国防科技大学电子科学与工程学院获信息与通信工程专业博士学位, 现为国防科技大学电子科学与工程学院讲师, 主要研究方向为移动通信和阵列信号处理。